

热效应下克尔微谐振腔耗散孤子动力学稳定性分析

方青林¹, 焦明杰², 夏豪杰¹

(1,2. 合肥工业大学 仪器科学与光电工程学院 合肥 230009)

Email: qlfang@mail.hfut.edu.cn

摘要: 热效应在高质量谐振器和基于光频梳的高精度测量中无处不在。本文利用 Lugiato-Lefever 热模型, 从理论上和数值上分析了克尔微谐振器的热力学稳定性。分析了随热参数变化的空间分岔结构和稳态存在范围。研究表明, 热效应导致原分岔结构由 Hamiltonian-Hopf 分岔转变为 Belyakov-Devaney 分岔。

关键词: 光频梳; 热效应; 稳定性; 分岔结构

Stability analysis of dissipative soliton dynamics in a Kerr microresonator under thermal effects

Qinglin Fang¹, Mingjie Jiao², Haojie Xia¹

(1,2. School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Thermal effects are ubiquitous in high-quality resonators and microcomb-based high precision measurements. We present a stability analysis of the thermodynamics in a driven Kerr microresonator theoretically and numerically, using the thermal Lugiato-Lefever model. We analyze the spatial bifurcation structure and existence range of stationary states depending on the thermal parameters. Our study shows that, the thermal effect causes the original bifurcation structure to change from Hamiltonian-Hopf bifurcation to Belyakov-Devaney bifurcation.

Keywords: Optical frequency comb; Thermal effect; Stability; Bifurcated structure.

1、研究背景

克尔频率梳是由具有高质量因子和克尔非线性的回音壁模式 (WGM) 谐振器产生的一组等距频谱分量。相邻梳之间的间距由微谐振器的自由频谱范围 (FSR) 决定, 此外, 克尔频率梳具有高相干性、高重复率、体积小、易于封装等特点, 为精密频率 / 距离测量、天文光谱校准、任意波形生成、射频 / 微波信号源、高精度频率 / 距离测量等领域提供了广阔的应用前景。以及用于相干光通信的多波长光源。

在基于微纳谐振腔的光频梳研究领域，目前描述光场动态演化的主流理论模型有两种。一种是耦合模式方程，它从频域的角度描述了谐振器内部不同模式之间的耦合关系。另一种是 Lugiato-Lefever 方程 (LLE)，它从时域角度描述了光场的包络演化。然而，LLE 可以将计算复杂度降低几个数量级，极大地提高了仿真效率。

为了描述光在微腔中的非线性动力学，在平均场近似中，可以使用著名的 Lugiato-Lefever (LL) 方程对微谐振腔进行建模。目前，以往的研究工作大多集中在反常色散和正常色散情况下的微谐振腔动力学研究。在此基础上，人们对图灵环、周期图案和孤子晶体的稳定性已经有了很好的了解。然而，大多数理论进展都忽略了热效应对微谐振腔内光场波形和稳定性的影响。进一步研究热效应对孤子形成的影响，特别是非线性动力学过程和确定性孤子的形成过程，是特别有趣的。

2、研究内容

在本文中，我们从理论上和数值上研究了克尔谐振器的稳定性和热光学动力学。通过对 Lugiato-Lefever (LL) 方程的分析，给出了其稳态解的基本性质和光学双稳态的三次方程，并研究了系统在主要模式下的均匀稳态特性及其线性稳定性。

利用加入热效应后的 Lugiato-Lefever 方程，从理论和数值上分析了腔内的耗散加热对于孤子稳定性的影响。在这里，我们计算了在反常色散下克尔色散腔中不同类型的分叉结构和稳定性。考虑热效应的 LLE 方程：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -[1 + i(\alpha + \theta)]\psi + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i|\psi|^2\psi + F, \quad \psi(x=0, t) = \psi(x=L, t), \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -AP - B\theta, \quad (2)$$

为了找到系统的各种平衡点并确定它们的稳定性，我们首先设置 $\partial\psi/\partial t = 0$ ，使得包络 $\psi_s(x)$ 与时间无关。则热失谐为 $\theta_s = -CP_s$ ，其中 P 是平均功率， C 是热灵敏度参数。如上所述， $\psi_s(x)$ 服从方程：

$$-[1 + i(\alpha - CP_s)]\psi_s + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} + i|\psi_s|^2\psi_s + F = 0, \quad (3)$$

通过令 $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$ ，可以得到方程 (3) 的平衡解 $\psi_s(x) = \psi_c$ ，此时平均功率可以表示为 $|\psi_c|^2$ 。因此，热非线性可以与克尔非线性相结合得到

$$-(1 + i\alpha)\psi_c + i(1 + C)|\psi_c|^2\psi_c + F = 0, \quad (4)$$

方程 (4) 的解满足经典的光学双稳态方程

$$(1 + C)^2 I_h^3 - 2(1 + C)\alpha I_h^2 + (1 + \alpha^2)I_h = F^2, \quad (5)$$

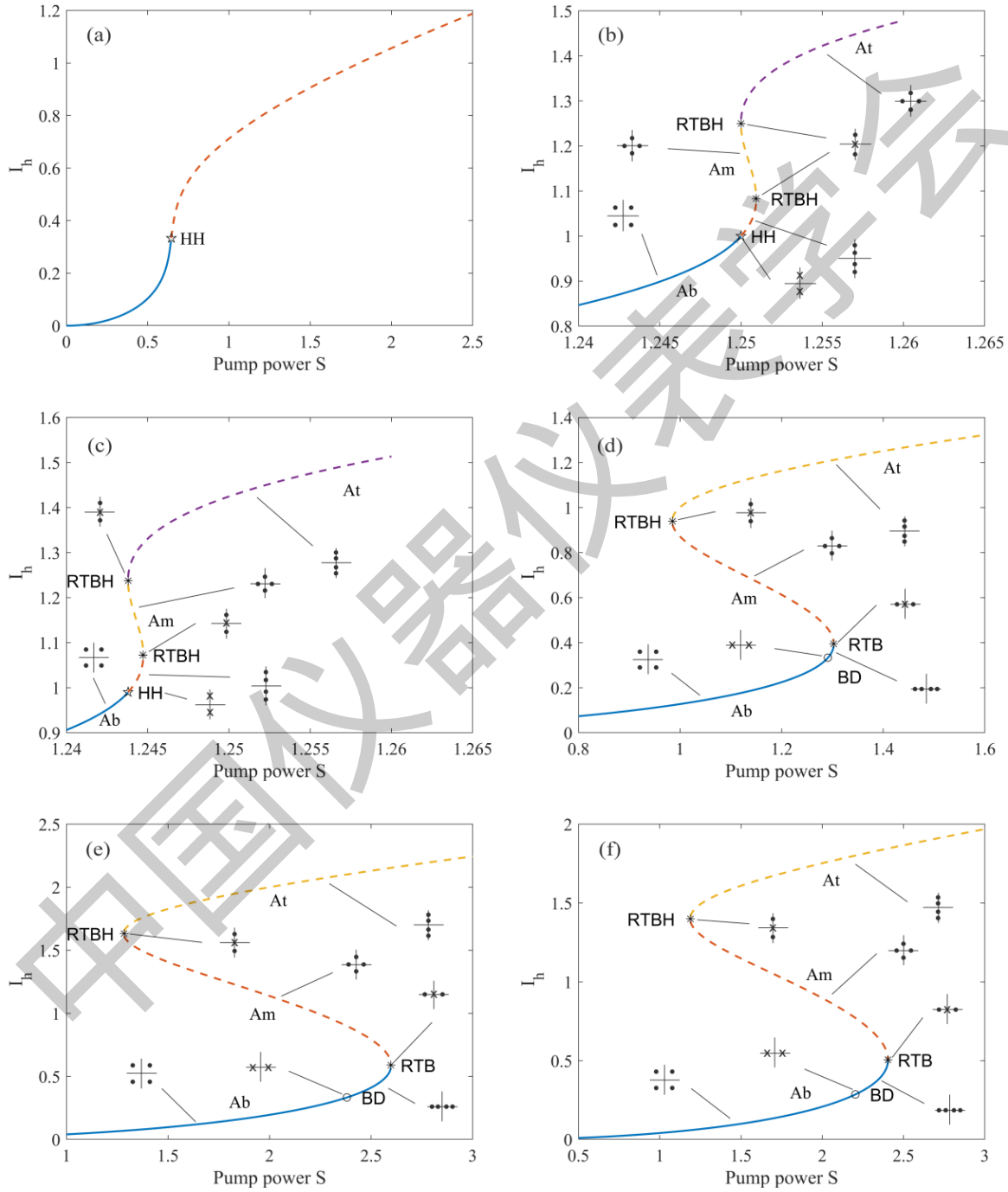


图 1: 加入热效应后, 稳态解的性质及其稳定性

空间分叉分析用于研究动态系统的静态解的形态及稳定性，通过分叉分析，可以获取特定静态解在参量空间的存在区间信息。在修正的 LL 方程中，将时间导数项 $\partial\psi/\partial t = 0$ ，将腔内场分离为 $\psi = \psi_r + i\psi_i$ ，其中， ψ_r 为 ψ 的实部， ψ_i 为 ψ 的虚部，则式 (1) 可表示为：

$$\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial x^2} = -2\{\psi_r[\psi_r^2 + \psi_i^2 - (\alpha - CP_s)] - \psi_i\}, \quad \dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} = -2\{\psi_i[\psi_r^2 + \psi_i^2 - (\alpha - CP_s)] + \psi_r - F\}, \quad \dots\dots(7)$$

通过等式 (6) 和 (7) 可以得到稳态解的特征方程：

$$\lambda^4 + 4\lambda^2(2(1+C)I_h - \alpha) + 4[3(1+C)^2I_h^2 - \dots\dots 4\alpha(1+C)I_h + \alpha^2 + 1] = 0. \quad \dots\dots(8)$$

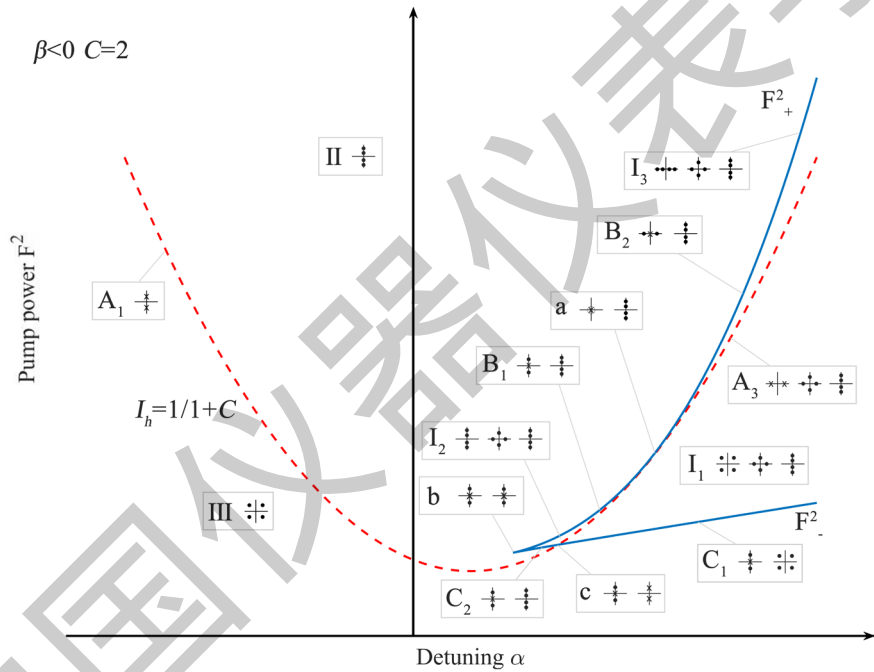


图 2：反常色散下，考虑热效应的特征值分岔图

从图 1 和图 2 可以发现，在不存在热效应的情况下，调制不稳定性对双稳方程解的上下分支都有影响，而在存在热效应的情况下，调制不稳定性对解的上分支都有影响。这是因为在热效应的影响下，空间分支发生了变化。因此，对系统进行了空间分岔分析，并对方程的不同平衡状态进行了分类。此外，我们发现在典型的热条件下，下分支不易受调制不稳定性的影响，因此孤子的确定性访问路径必须从相对较小的失谐开始。

3、结论

综上所述,我们对光频梳的分岔分析进行了详细的研究,并利用热 LL 方程研究了光频梳的热-光动态稳定性和空间分岔问题。研究了热效应对调制不稳定性 (HH 分岔) 的影响。结果表明,热效应会影响微谐振器频率梳的稳定性,双稳曲线中的 HH 分岔会转变为 BD 分岔,导致调制不稳定性消失。此外,我们发现热效应可以增加孤子的存在范围并提高其稳定性。

参考文献

- [1] A. Leshem, Z. Qi, T. F. Carruthers, C. R. Menyuk, and O. Gat. Thermal instabilities, frequency-comb formation, and temporal oscillations in Kerr microresonators. *Phys. Rev. A*, vol. 103, no. 1, Jan. 2021, Art. no. 013512.
- [2] P. Parra-Rivas, E. Knobloch, L. Gelens, and D. Gomila. Origin, bifurcation structure and stability of localized states in Kerr dispersive optical cavities. *IMA J. Appl. Math.*, vol. 86, no. 5, pp. 856–895, Oct. 2021.